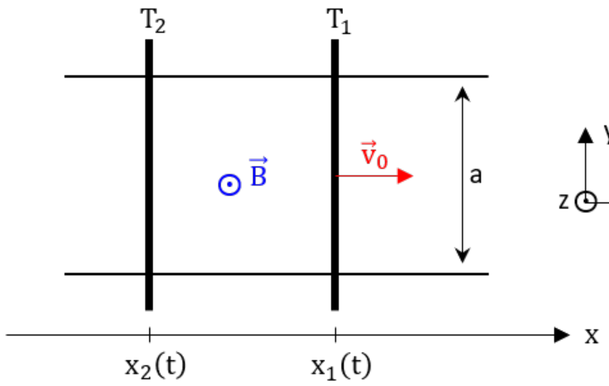
Exercice n°1 • Rails de Laplace avec deux tiges — *cours*

Deux tiges T_1 et T_2 identiques (masse m et résistance R) sont libres de se déplacer sans frottement sur deux rails horizontaux, parallèles (distants d'une distance a) et parfaitement conducteur.

L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme et vertical.



On repère T_1 par son abscisse x_1 et T_2 par x_2. On met en mouvement la tige T_1 avec une vitesse constante $\vec{v_0} = v_0\ \vec{e_x}$. On néglige les phénomènes d'auto-induction.

1) Expliquer qualitativement l'évolution du système et prédire l'état final.

2) Déterminer la force électromotrice induite e en fonction de B, a, $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

3) Appliquer le PFD à T_1 puis à T_2.

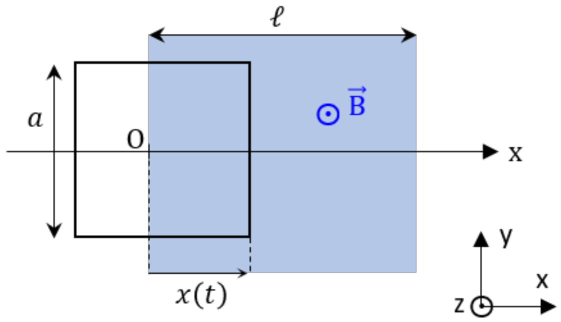
4) En déduire une relation liant $v_1(t)$, $v_2(t)$ et v_0.

5) Combiner les résultats des questions précédentes pour déterminer les expressions de $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

6) Déterminer l'énergie dissipée par effet Joule au cours du mouvement. Conclure.

Exercice n°2 • Freinage d'un mobile en translation — *cours*

On considère une spire carrée de côté a, en translation rectiligne selon l'axe (Ox) (la spire est guidée dans un plan horizontal, sans frottements, par un dispositif non représenté). Le champ magnétique est nul, sauf dans le domaine de longueur ℓ (avec $\ell > a$), où il est alors uniforme et stationnaire, égal à $\vec{B} = B\ \vec{e_z}$.



La position du cadre est représentée par l'abscisse $x(t)$ de son segment droit. On lance le cadre avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0\ \vec{e_x}$ depuis la partie de champ magnétique nul correspondant à $x < 0$. Le cadre pénètre dans la zone de champ magnétique à $t = 0$ et on étudie ensuite la dynamique du cadre, au cours de sa traversée dans la zone de champ magnétique. Le circuit défini par le cadre a une masse m et présente une résistance R, et on néglige son inductance propre dans cet exercice.

On suppose que v_0 est suffisamment élevée pour que la spire puisse traverser la zone de champ et en sortir entièrement.

On se place dans un premier temps dans le cas où $0 \leq x \leq a$.

1) Exprimer la force électromotrice induite dans le circuit défini par le cadre. En déduire l'équation électrique.

2) Exprimer la force de Laplace qui s'exerce sur le cadre pendant cette phase. En déduire l'équation mécanique.

3) En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$, puis de l'abscisse $x(t)$. Introduire un temps caractéristique τ.

4) Déterminer la date t_1 définie par $x(t_1) = a$.

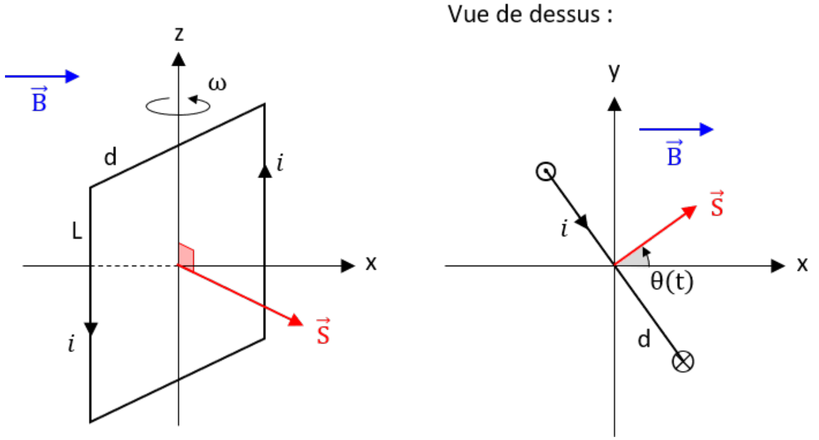
On se place désormais dans le cas où $a \leq x$.

5) Adapter ces raisonnements à la suite du mouvement pour en déduire la vitesse finale, notée v_∞ du cadre lorsqu'il est entièrement sorti de la zone où règne le champ magnétique.

6) Déterminer l'énergie dissipée par effet Joule au cours du mouvement, qu'on exprimera en fonction de v_0 et v_∞. Que retrouve-t-on?

Exercice n°3 • Spire en rotation — ★☆☆

Reprendre l'étude de la spire en rotation vu en cours (spire de moment d'inertie J_z, de résistance R et qui subit un couple moteur $\vec{\Gamma}_{mo} = \Gamma_{mo}\ \vec{e_z}$). Cette fois, ne pas négliger l'inductance propre de la spire et considérer qu'elle subit un couple de frottement fluide $\overrightarrow{\Gamma}_f = -\gamma\omega\,\overrightarrow{e}_z$.

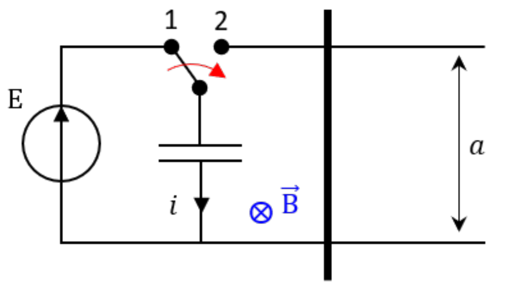


1) Déterminer les équations électrique et mécanique. On ne cherchera pas à obtenir les équations différentielles.

2) Effectuer un bilan de puissance. Commenter ce bilan.

Exercice n°4 • Rampe de lancement ★☆☆

À $t = 0$, on bascule l'interrupteur K de la position 1 à la position 2. Une tige T peut se déplacer sans frottements sur les rails espacés d'une longueur a, plongée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme.



On néglige l'auto-inductance du circuit et on considère que la tige possède une résistance R (on néglige la résistance du reste du circuit).

1) Déterminer la tension aux bornes du condensateur et la vitesse de la barre en $t = 0^+$?

2) Établir les équations électrique et mécanique de ce système.

3) Obtenir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$. Introduire un temps caractéristique τ du régime transitoire. Résoudre cette équation.

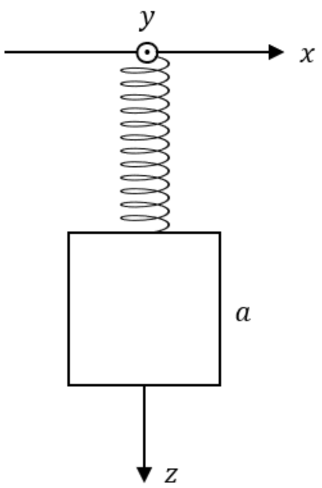
4) Déterminer $v(t)$. En déduire l'expression de la vitesse finale v_∞ de la tige.

5) Déterminer l'énergie dissipée par effet Joule durant le lancement.

Exercice n°5 • Amortissement magnétique ★⯪☆

On considère un cadre conducteur carré de masse m, de côté a et de résistance R, suspendu par un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k. L'ensemble est placé dans un champ magnétique :

$$\overrightarrow{B} = B_0\left(1 - \frac{z}{\delta}\right)\overrightarrow{e}_y \quad \text{avec :} \quad \delta > 0$$



Les effets d'auto-induction sont négligés. On note $z(t)$ la position du centre de masse de la spire.

1) Donner la position d'équilibre z_{eq} du cadre (position du centre de masse).

On lâche le cadre d'une hauteur $z_{eq} + h$, sans vitesse initiale.

2) Écrire les équations électrique et mécanique.

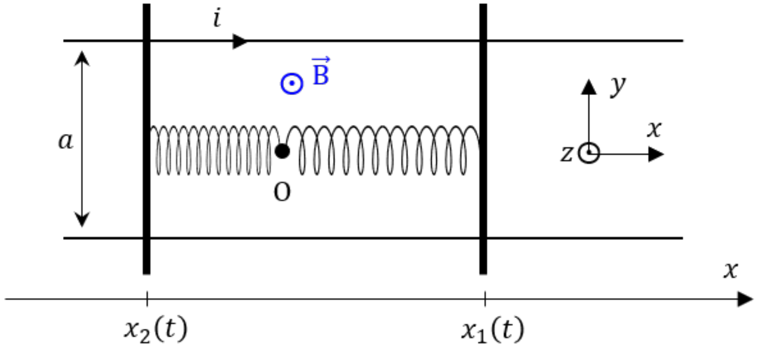
3) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$. Commenter.

4) Déterminer l'énergie dissipée entre le moment où on lâche le cadre et le moment où le mouvement est totalement arrêté.

Exercice n°6 • Oscillateurs couplés par induction ★★☆

On considère un circuit constitué par deux rails horizontaux parfaitement conducteur distants de a et deux barres, chacune de masse m et de résistance R constante. Chaque barre est reliée à un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 (les ressorts sont identiques) et attaché à l'autre extrémité aux point O. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, perpendiculaire au plan des rails.

On négligera les phénomènes d'auto-induction.



À $t = 0$, le ressort 2 est à l'équilibre et le ressort 1 possède une longueur $\ell_1(0) = \ell_0 + x_0$. Les barres sont maintenues en place, elles ne possèdent donc pas de vitesse. À $t = 0$, on lâche les deux barres.

1) Déterminer qualitativement le mouvement ultérieur et prévoir le mouvement des barres lorsque $t \to \infty$.

Dans la suite, on pourra introduire et utiliser tout paramètre jugé pertinent.

2) Établir les équations électrique et mécaniques (une pour chaque barre).

3) Obtenir les équations différentielles vérifiées par $s(t) = x_1(t) + x_2(t)$ et $d(t) = x_1(t) - x_2(t)$.

4) Les résoudre entièrement sous l'hypothèse d'un facteur de qualité très grand devant 1. En déduire les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Exercice n°7 • Freinage par induction ★★☆

On considère une spire conductrice de surface S, de résistance R et d'inductance propre négligeable, mobile en rotation sans frottement autour d'un axe (Oz). Cette spire est de plus plongée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme, stationnaire et perpendiculaire à l'axe de rotation. On note J son moment d'inertie par rapport à (Oz). À $t = 0$, l'angle θ entre le champ magnétique et le vecteur surface de la spire est nul et la vitesse de rotation a la valeur ω_0.

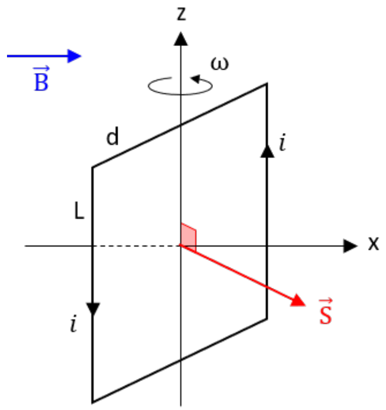
1) Déterminer la fem induite dans la spire en fonction de B, S, ω et θ et en déduire l'intensité du courant induit.

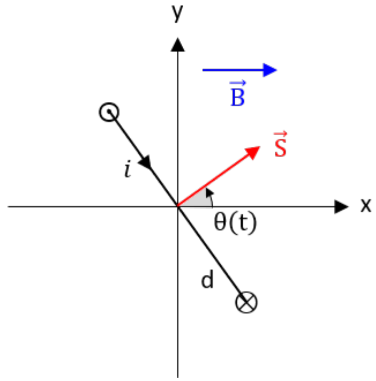
2) Déterminer le moment du couple des forces de Laplace s'exerçant sur la spire par rapport à l'axe de rotation.

3) On suppose que ω varie peu sur un tour. En déduire le moment moyen sur un tour en fonction de B, S, R et ω. Dans la suite de l'exercice on considérera cette valeur moyenne et non la valeur instantanée du moment.

4) Déterminer l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique. On pourra poser $\tau = 2RJ/(BS)^2$. En déduire $\omega(t)$ en fonction de ω_0 et. Tracer $\omega(t)$.

5) Montrer que l'hypothèse de la question 3 est vérifiée dès lors que $\omega \gg 2\pi/\tau$.





Exercice n°8 • Pendules couplés par induction ★★★

Deux pendules homogènes de longueur a, de moment d'inertie J et de résistance électrique R sont libres d'osciller sans frottement autour d'un axe (Oz), dans le plan (Oxy) et sans se percuter. Ils sont connectés électriquement en O. À l'autre extrémité, les deux pendules sont en en contact (sans frottement) avec une piste circulaire parfaitement conductrice qui assure simplement le contact électrique entre les deux tiges. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ et dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$. On néglige l'auto-induction du circuit.

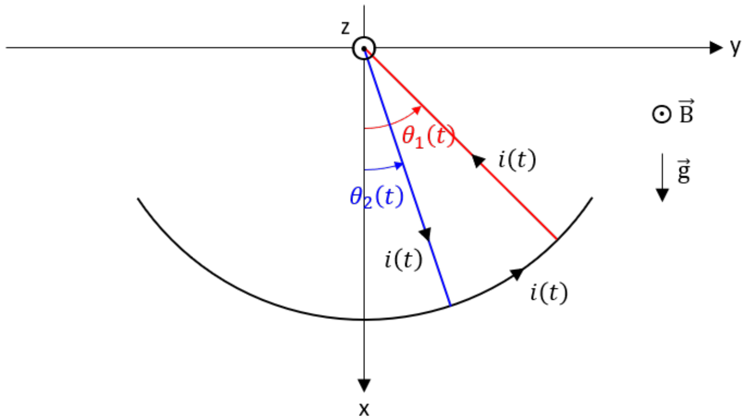
Dans l'état initial, le pendule 2 (repéré par l'angle θ_2) est à sa position d'équilibre, et le pendule 1 (repéré par l'angle θ_1) est lâché d'un angle $\theta_0 \ll 1$ rad et sans vitesse initiale.

1) Prévoir, de manière qualitative, la dynamique du système.

2) Établir les équations mécaniques de chaque pendule et l'équation électrique.

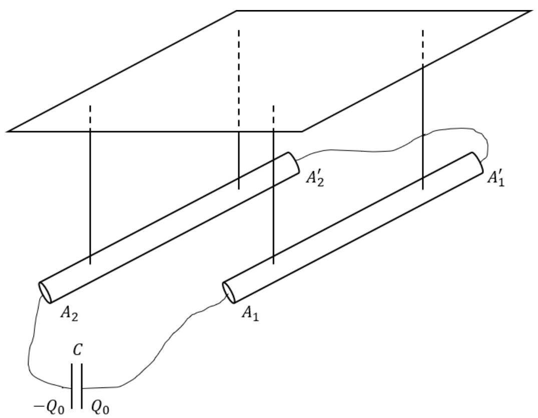
3) Déterminer les équations différentielles vérifiées par les angles $\alpha = \theta_1 + \theta_2$ et $\beta = \theta_1 - \theta_2$.

4) On se place en régime pseudo-périodique. Introduire les paramètres qui vous semblent pertinents et déterminer $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$. Que deviennent ces expressions en régime établi ?



Exercice n°9 • Recul par induction ★★★

On considère deux barres parallèles de masse linéique λ (masse par unité de longueur), suspendues par des fils de masse négligeable et séparées d'une distance d. Elles sont reliées par un fil électrique d'un côté (en leurs extrémités A'_1, A'_2) et par un condensateur de l'autre (en leurs extrémités A_1, A_2). Ce condensateur, de capacité C, est initialement chargé de charge Q_0.



On note R la résistance électrique du circuit en entier. On ferme le circuit à l'instant $t=0$. On suppose que le temps de décharge $\tau = RC$ du condensateur est négligeable devant le temps caractéristique de déplacement des barres. On rappelle que la norme du champ magnétique créé par un fil (supposé infini) vaut $B=\mu_0 i/2\pi r$, où r est la distance au fil.

Déterminer la hauteur h atteinte par les barres en se repoussant.

Éléments de correction

❶ 2) $e=2Ri=Ba\,(v_1-v_2)$. 3) $m\dot{v}_1=-iaB$ et $m\dot{v}_2=iaB$. 4) $v_1+v_2=cte=v_0$. 5) $v_1=\frac{v_0}{2}\left(1+e^{-t/\tau}\right)$ et $v_2=\frac{v_0}{2}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$. 6) $\mathcal{E}_J=\frac{1}{4}mv_0^2$. ❷ 1) $e=Ri=Bav$. 2) $\overrightarrow{F_L}=-iaB\,\overrightarrow{e_x}$ donc $m\dot{v}=-iaB$. 3) $v(t)=v_0\,e^{-t/\tau}$ et $x(t)=\tau v_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)$. 4) $t_1=-\tau\ln\left(1-\frac{a}{\tau v_0}\right)$. 5) $v_\infty=v_0-\frac{2a}{\tau}$. 6) $\mathcal{E}_{tot}=\frac{1}{2}m\left(v_0^2-v_\infty^2\right)$ ❸ 1) $e=Ri=-L\frac{di}{dt}+BS\omega\sin(\theta)$ et $J_z\dot{\omega}=\Gamma_{mo}-\gamma\omega-iSB\sin(\theta)$. 2) $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_{cin}+\mathcal{E}_{mag}\right)=\mathcal{P}_{motrice}-Ri^2-\gamma\omega^2$. ❹ 1) $u_c(0^+)=E$ et $v(0^+)=0$. 2) $e=Ri+u_c=Bav$. 3) $\frac{di}{dt}+\frac{i(t)}{\tau}=0$ avec : $\tau=\left(\frac{1}{RC}+\frac{(Ba)^2}{mR}\right)^{-1}$. 4) $v(t)=v_\infty\left(1-e^{-t/\tau}\right)$ avec : $v_\infty=\frac{aBE\tau}{R}$. 5) $\mathcal{E}_J=\frac{\tau E^2}{2R}$.
❺ 1) $z_{eq}=\ell_0-\frac{mg}{k}$. 2) $Ri=\frac{B_0a^2v}{\delta}$ et $m\ddot{z}=mg-k\,(z-\ell_0)-\frac{ia^2B_0}{\delta}$. 3) $\ddot{z}+\frac{ia^4B_0^2}{mR\delta}\,\dot{z}+\frac{k}{m}\,z=\frac{k}{m}\,z_{eq}$. 4) $\mathcal{P}_J=\frac{1}{2}kh^2$ ❻ 2) $e=2Ri=Ba\,(\dot{x}_1-\dot{x}_2)$, $m\ddot{x}_1=-k\,(x_1-\ell_0)-iaB$ et $m\ddot{x}_2=k\,(-x_2-\ell_0)+iaB$. 3) $\ddot{s}+\omega_0^2\,s(t)=0$ et $\ddot{d}+\frac{\omega_0}{Q}\,\dot{d}+\omega_0^2\,d(t)=\omega_0^2\,d_{eq}$ avec : $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$, $Q=\frac{\sqrt{mk}R}{a^2B^2}$ et $d_{eq}=x_0+2\ell_0$. 4) $s(t)=x_0\cos(\omega_0t)$ et $d(t)\simeq(x_0+2\ell_0)\,\cos(\omega_0t)\,e^{-\lambda t}$. Donc : $x_1(t)=\frac{1}{2}\left[x_0+(x_0+2\ell_0)\,e^{-\lambda t}\right]\cos(\omega_0t)$ et $x_2(t)=\frac{1}{2}\left[x_0-(x_0+2\ell_0)\,e^{-\lambda t}\right]\cos(\omega_0t)$ ❼ 1) $i=\frac{BS\omega}{R}\sin(\theta)$. 2) $\overrightarrow{\Gamma}_L=-\frac{\omega}{R}\left(BS\omega\sin(\theta)\right)^2\overrightarrow{e_z}$. 3) $\langle\overrightarrow{\Gamma}_L\rangle=-\frac{\omega S^2B^2}{R}\overrightarrow{e_z}$. 4) $\dot{\omega}+\frac{\omega}{\tau}=0$ donc $\omega(t)=\omega_0\,e^{-t/\tau}$. 5) Poser : $\omega(t)-\omega(t+T)\ll\omega(t)$. ❽ 2) $2Ri=-\frac{Ba^2}{2}\left(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2\right)$, $J\ddot{\theta}_1=-\frac{mga}{2}\sin(\theta_1)+\frac{ia^2B}{2}$ et $J\ddot{\theta}_2=-\frac{mga}{2}\sin(\theta_2)-\frac{ia^2B}{2}$. 3) $J\ddot{\alpha}=-\frac{mga}{2}\,\alpha$ et $J\ddot{\beta}=-\frac{mga}{2}\,\beta-\frac{\dot{\beta}}{R}\left(\frac{a^2B}{2}\right)^2$. 4) $\alpha(t)=\theta_0\cos(\omega_0t)$ et $\beta(t)=\theta_0\,e^{-\lambda t}\left(\cos(\Omega t)+\frac{\lambda}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)$. Régime établit : $\theta_1(t)=\theta_2(t)=\frac{\theta_0}{2}\cos(\omega_0t)$. ❾ $h=\frac{1}{2g}\cdot\left(\frac{\mu_0Q_0^2}{4\pi\lambda RCd}\right)^2$.